Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

18. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

3. април 2024. године

Први дан

1. Нека су $1 = d_1 < d_2 < d_3 < ... < d_k = n$, где је $k \geqslant 4$, сви позитивни делиоци датог природног броја n. Одредити све природне бројеве n за које постоји пермутација бројева $d_2 - d_1, d_3 - d_2, d_4 - d_3, \ldots, d_k - d_{k-1}$, таква да они чине коначну геометријску прогресију.

2. *Турнир* реда n, $n \in \mathbb{N}$, се састоји од 2^n играча, који су индексирани бројевима од 1 до 2^n, и n кола. У сваком колу се преостали играчи упаре и обрачунају се у математичком двобоју и побеник пролази у наредно коло. Победник n-тог кола се сматра победником турнира. Два турнира се сматрају различитим уколико постоји двобој који се одвио у k-том колу једног турнира, а није у k-том колу другог турнира, или уколико имају различите победнике. Одредити колико постоји различитих турнира реда n са својством да за свако коло важи да су суме индекса учесника у сваком двобоју у том колу међусобне једнаке.

3. Дато је $2n$, $n \in \mathbb{N}$, реалних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Доказати да за свако $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ постоје два реална броја α и β, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, таква да важи $p_m = \min\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, где је

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(a_i - a_j) + \beta(b_i - b_j)|,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

18. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

4. април 2024. године

Други дан

4. Нека су тачке I и I_a, редом, центри уписане кружнице и споља приписане кружнице наспрам темена A неједнакокраког троугла ABC. Уписана кружница тог троугла додирује странице BC, AC и AB, редом, у тачкама D, E и F. Праве EF и BC се секу у тачки P, а тачка X је средиште дужи PD. Доказати да је $XI \perp I_aD$.

5. Нека је $n \geqslant 3$ фиксиран природан број. Одредити све природне бројеве k за које је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, која је дефинисана са

$$f(x) = \cos^k x + \cos^k(x + \frac{2\pi}{n}) + \cos^k(x + \frac{4\pi}{n}) + \ldots + \cos^k(x + \frac{2(n-1)\pi}{n}), \text{ за свако } x \in \mathbb{R},$$

константна.

6. Одредити све неконстантне полиноме P, са целобројним коефицијентима, и позитивним водећим коефицијентом, такве да је број $P^{2mn}(m^2) + n^2$ квадрат целог броја, за све природне бројеве m и n ($P^k(x) = \underbrace{P(P(P(\ldots P}_{k}(x)\ldots)))$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$).

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.